



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
IN DER KULTURHAUPTSTADT EUROPAS  
CHEMNITZ

Professur Psychologie digitaler Lernmedien

Institut für Medienforschung

Philosophische Fakultät

## Statistik I

# Varianzanalyse mit Messwiederholung



Before I Fall (2017). Open Road Films.

# Überblick

- Einführung
- Personenvarianz, Effektvarianz und Residualvarianz
- Empirischer  $F$ -Wert zu einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung
- Quadratsumme für den Faktor A und Residualquadratsumme
- Zähler- und Nennerfreiheitsgrade
- Inferenzstatistische Entscheidung und Ergebnisdarstellung
- Inferenzstatistische Voraussetzungen
- Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor
- Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf beiden Faktoren

# Einführung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021; Rey, 2020)

- **Varianzanalyse (engl. analysis of variance, ANOVA):** Statistisches Verfahren zum simultanen Vergleich mehrerer Mittelwerte
- **Einfaktorielle und mehrfaktorielle Varianzanalyse**
- **Varianzanalyse mit Messwiederholung:** Varianzanalyse für voneinander abhängige Messungen

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021)

- **Definition:** Varianzanalyse zu einem messwiederholten Versuchsdesign, bei dem die Messungen voneinander abhängig sind
- **Beispiel:** Lernleistungen werden während eines Lerntrainings wiederholt an denselben Versuchspersonen gemessen
- **Personenvarianz:** Neben der Effektvarianz kann die Personenvarianz aufgeklärt werden, die sich auf allgemeine Unterschiede zwischen den Personen bezieht
- **Vor- und Nachteile von Varianzanalysen mit Messwiederholung**
  - Höhere Teststärke bzw. geringeres benötigtes  $N$
  - Auftreten von Übungs- und Sequenzeffekten (Reihenfolgeeffekte)
  - Bestimmte Forschungsfragen lassen sich nicht (sinnvoll) mit Messwiederholung untersuchen

# Varianzanalyse mit Messwiederholung

Wann ist eine Messwiederholung sinnvoll?

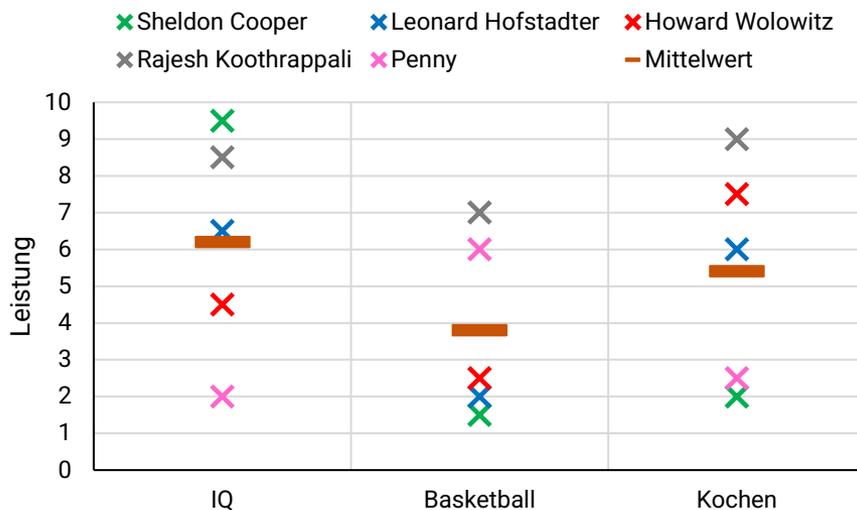
- A: Ein einzelner Lerntext wird einmal mit und einmal ohne Unterstreichungen der zentralen Begriffe präsentiert.
- B: Beim Vokabellernen wird einmal mit roten und einmal mit blauen Karteikarten gelernt.
- C: Eine einzelne Animation wird mit oder ohne Unterbrechungen präsentiert.
- D: Ein Lernspiel wird einmal miteinander und einmal gegeneinander gespielt.

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021)

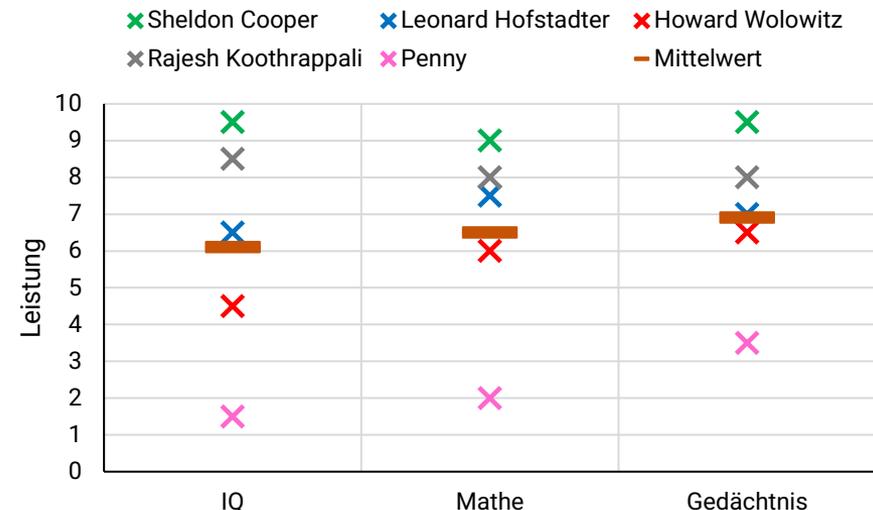
- **Zerlegung der Gesamtvarianz** aller Messwerte in Personenvarianz, Effektvarianz und Residualvarianz (Fehlervarianz)
- **Personenvarianz:** Varianz, die auf systematische Unterschiede zwischen den Versuchspersonen zurückzuführen ist
- **Effektvarianz:** Varianz, die durch den Einfluss der experimentellen Faktoren (und deren Wechselwirkungen) verursacht wird
- **Residualvarianz:** Varianz, die nicht erklärt werden kann und die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt (auf Stichprobenebene nicht voneinander trennbar)
  - Wechselwirkung zwischen dem Personenfaktor und den Stufen des messwiederholten Faktors
  - Restliche unsystematische Einflüsse

# Varianzanalyse mit Messwiederholung

- **Fiktive Ergebnisse** zweier Studien mit Messwiederholung
- Jeweils mit einem einfaktoriellen, dreifachgestuften Versuchsdesign (d. h. drei Versuchsbedingungen)



Personenvarianz gering  
Effektvarianz hoch



Personenvarianz hoch  
Effektvarianz gering

# Varianzanalyse mit Messwiederholung

- **Fiktive Rohdaten** zu einer Studie (vgl. rechte Abbildung auf der vorherigen Seite)

## IQ

VPN	Leistung
Sheldon	9.5
Leonard	6.5
Howard	4.5
Rajesh	8.5
Penny	1.5
<i>M</i>	6.1

## Mathe

VPN	Leistung
Sheldon	9.0
Leonard	7.5
Howard	6.0
Rajesh	8.0
Penny	2.0
<i>M</i>	6.5

## Gedächtnis

VPN	Leistung
Sheldon	9.5
Leonard	7.0
Howard	6.5
Rajesh	8.0
Penny	3.5
<i>M</i>	6.9

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Für ein einfaktorielles Design mit Messwiederholung gilt:

$$F_A = \frac{\frac{QS_A}{df_A}}{\frac{QS_{AxVpn}}{df_{AxVpn}}}$$

$F_A$	= Empirischer $F$ -Wert für den Faktor A
$QS_A$	= Quadratsumme des Faktors A
$QS_{AxVpn}$	= Residualquadratsumme
$df_A$	= Zählerfreiheitsgrade
$df_{AxVpn}$	= Nennerfreiheitsgrade

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- **Formel** zur Berechnung der Quadratsumme für die Wechselwirkung  $A \times V_{pn}$ :

$$QS_{AxVpn} = \sum_{i=1}^p \sum_{m=1}^N [x_{im} - (\bar{A}_i + \bar{P}_M - \bar{G})]^2$$

$p$  = Anzahl an Faktorstufen von A  
 $N$  = Anzahl an Versuchspersonen  
 $\bar{A}_i$  = Mittelwert der Gruppe  $i$   
 $\bar{P}_M$  = Mittelwert der Versuchsperson  $m$   
 $\bar{G}$  = Gesamtmittelwert

- Formel nicht identisch für nicht messwiederholte Varianzanalysen
- **Für das Beispiel gilt:**
  - Gruppenmittelwerte: 6.1, 6.5 und 6.9
  - Personenmittelwerte: 9.33, 7.00, 5.67, 8.17 und 2.33
  - Gesamtmittelwert: 6.5
- **Berechnung:**

$$QS_{AxVpn} \approx [9.5 - (6.1 + 9.33 - 6.5)]^2 + \dots + [3.5 - (6.9 + 2.33 - 6.5)]^2 \approx 3.567$$

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021)

- **Formel** zur Berechnung der Quadratsumme für den Haupteffekt A:

$$QS_A = n \cdot \sum_{i=1}^p (\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

$n$  = Anzahl an Versuchspersonen in einer Gruppe  
 $\bar{A}_i$  = Mittelwert der Gruppe  $i$   
 $\bar{G}$  = Gesamtmittelwert

- Formel identisch für nicht messwiederholte Varianzanalysen
- **Für das Beispiel gilt:**
  - Anzahl an Versuchspersonen in einer Gruppe: 5
  - Gruppenmittelwerte: 6.1 (IQ), 6.5 (Mathe) und 6.9 (Gedächtnis)
  - Gesamtmittelwert: 6.5
- **Berechnung:**

$$QS_A \approx 5 \cdot [(6.1 - 6.5)^2 + (6.5 - 6.5)^2 + (6.9 - 6.5)^2] \approx 5 \cdot 0.32 \approx 1.6$$

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021)

- **Zählerfreiheitsgrade:** Bei einer einfaktoriellen, univariaten Varianzanalyse mit Messwiederholung (MW)
  - Formel:  $df_A = p - 1$   $p = \text{Anzahl an Versuchsbedingungen}$
  - Formel identisch für nicht messwiederholte Varianzanalysen
  - Beispiel: Bei drei Versuchsbedingungen ist  $df_A = 3 - 1 = 2$
- **Nennerfreiheitsgrade:** Bei einer einfaktoriellen, univariaten Varianzanalyse mit MW
  - Formel:  $df_{A \times V_{pn}} = (p - 1) \cdot (n - 1)$   $n = \text{Anzahl an Versuchspersonen in einer Bedingung}$
  - Formel nicht identisch für Varianzanalysen ohne MW
  - Beispiel: Bei drei Versuchsbedingungen ist  $df_{A \times V_{pn}} = 2 \cdot 4 = 8$

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Frieese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Berechnung des empirischen  $F$ -Wertes:

$$F_A = \frac{\frac{QS_A}{df_A}}{\frac{QS_{AxVpn}}{df_{AxVpn}}}$$

Einsetzen ergibt:  $F_A \approx \frac{1.6}{\frac{2}{\frac{3.57}{8}}} \approx 1.79$

- **Kritischer  $F$ -Wert** für  $df_A = 2$  und  $df_{AxVpn} = 8$  sowie  $\alpha = .05$ :  
 $F_{\text{krit}} \approx 4.46$
- **Inferenzstatistische Entscheidung und Ergebnisdarstellung**
  - Da  $F_{\text{emp}} = 1.79 < F_{\text{krit}} = 4.46$  wird  $H_0$  vorläufig beibehalten, d. h. das Ergebnis ist nicht signifikant
  - $F_A(2,8) = 1.79, p = .23, \eta_p^2 = .31. 1-\beta = .93$  für  $f = .25$  und  $\alpha = .05$

# Varianzanalyse mit Messwiederholung (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- **Inferenzstatistische Voraussetzungen** (vgl. ANOVA ohne MW)
  - Homogenität der Korrelationen zwischen den Stufen des messwiederholten Faktors
  - Intervallskalenniveau der AV
  - Normalverteilung der AV in der Population (getrennt für jede Versuchsbedingung oder auf Basis der Residuen)
  - Varianzhomogenität
- **Zirkularitätsannahme** (liberalere Variante der erstgenannten Voraussetzung): Varianzhomogenität der Differenzen der Messungen von jeweils zwei Faktorstufen
  - Prüfung mittels Sphärizitätstest (Mauchly-Test)
  - Korrekturverfahren bei Verletzungen der Annahme berichtigen die Freiheitsgrade → Ergebnis wird weniger schnell signifikant

# Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- **Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor:** Varianzanalyse mit einer messwiederholten und einer nicht messwiederholten unabhängigen Variable
- **Zerlegung der Gesamtvarianz** aller Messwerte in Personenvarianz, Effektvarianzen des messwiederholten und des nicht messwiederholten Faktors und deren Wechselwirkung sowie der Residualvarianz (Fehlervarianz)
- **Residualvarianz:** Varianz, die nicht erklärt werden kann und die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt (auf Stichprobenebene nicht voneinander trennbar)
  - Wechselwirkung zwischen dem Personenfaktor und den Stufen des messwiederholten Faktors
  - Restliche unsystematische Einflüsse

# Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Formeln zur Berechnung der Quadratsummen (vgl. Vorlesung 8. Mehrfaktorielle Varianzanalyse (ohne MW)) für...

- den nicht messwiederholten Faktor A

$$QS_{A(\text{nicht mw})} = \sum_{i=1}^p n \cdot q \cdot (\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

- den messwiederholten Faktor B

$$QS_{B(\text{mw})} = \sum_{j=1}^q n \cdot p \cdot (\bar{B}_j - \bar{G})^2$$

- die Wechselwirkung

$$QS_{A \times B(\text{mw})} = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p n \cdot [\bar{A}\bar{B}_{ij} - (\bar{A}_i + \bar{B}_j - \bar{G})]^2$$

$p$  = Anzahl an Faktorstufen des Faktors A

$n$  = Anzahl an Versuchspersonen in einer Gruppe

$q$  = Anzahl an Faktorstufen des Faktors B

$\bar{A}_i$  = Mittelwert der Gruppe  $i$

$\bar{G}$  = Gesamtmittelwert

$\bar{B}_j$  = Mittelwert der Gruppe  $j$

# Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- **Unterschied zu den vorher vorgestellten Varianzanalysen** (ein- und mehrfaktorielle Varianzanalysen ohne MW; einfaktorielle Varianzanalyse mit MW): (Prüf-)Quadratsumme im Nenner des  $F$ -Wertes nicht mehr bei allen Effekten gleich, sondern unterschiedlich
- **Grund:** Erwartungswerte der systematischen Varianzen bzw. Quadratsummen unterscheiden sich, je nachdem, ob messwiederholter Faktor beteiligt ist oder nicht
- **Folge:** Berechnung unterschiedlicher (Prüf-)Quadratsummen (in Abhängigkeit der zu testenden Effekte)

# Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Formeln zur Berechnung der (Prüf-) Quadratsummen (Quadratsummen im Nenner des F-Wertes) für...
- den nicht messwiederholten Faktor A

$$QS_{Vpnins} = \sum_{i=1}^p \sum_{m=1}^n q \cdot (\bar{A}\bar{P}_{im} - \bar{A}_i)^2$$

- den messwiederholten Faktor B sowie für die Wechselwirkung

$$QS_{BxVpn} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{m=1}^n [x_{ijm} - (\bar{A}\bar{B}_{ij} + \bar{A}\bar{P}_{im} - \bar{A}_i)]^2$$

$p$  = Anzahl an Faktorstufen des Faktors A  
 $n$  = Anzahl an Versuchspersonen in einer Gruppe  
 $q$  = Anzahl an Faktorstufen des Faktors B  
 $\bar{A}_i$  = Mittelwert der Gruppe  $i$  des Faktors A  
 $\bar{P}_{im}$  = Mittelwert der Versuchsperson  $im$   
 $x_{ijm}$  = Wert der Person  $m$  unter der Faktorstufenkombination  $i$  des Faktors A und  $j$  des Faktors B  
 $\bar{A}\bar{B}_{ij}$  = Mittelwert unter der Faktorstufenkombination  $i$  des Faktors A und  $j$  des Faktors B

# Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Berechnung der empirischen F-Werte: Wie bekannt gilt:

$$F = \frac{\frac{QS_{\text{Zähler}}}{df_Z}}{\frac{QS_{\text{Nenner}}}{df_N}}$$

$F$	= Empirischer $F$ -Wert
$QS_{\text{Zähler}}$	= Quadratsumme des Zählers
$QS_{\text{Nenner}}$	= Quadratsumme des Nenners
$df_Z$	= Zählerfreiheitsgrade
$df_N$	= Nennerfreiheitsgrade

- Für die Haupteffekte A und B sowie die Wechselwirkung A x B:

$$F_A = \frac{\frac{QS_{A(\text{nicht mw})}}{df_A}}{\frac{QS_{Vpnins}}{df_{Vpnins}}}$$

$$F_B = \frac{\frac{QS_{B(\text{mw})}}{df_B}}{\frac{QS_{BxVpn}}{df_{BxVpn}}}$$

$$F_{AxB} = \frac{\frac{QS_{AxB(\text{mw})}}{df_{AxB(\text{mw})}}}{\frac{QS_{BxVpn}}{df_{BxVpn}}}$$

# Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf beiden Faktoren (z. B. Rasch et al., 2021)

- **Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf beiden Faktoren:** Varianzanalyse mit zwei messwiederholten unabhängigen Variablen
- **Zerlegung der Gesamtvarianz** aller Messwerte in Personenvarianz, Effektvarianzen der messwiederholten Faktoren und deren Wechselwirkung (WW) sowie Residualvarianz (Fehlervarianz)
- **Residualvarianz:** Varianz, die nicht erklärt werden kann und die sich aus mehreren Komponenten zusammensetzt (auf Stichprobenebene nicht voneinander trennbar)
  - WW zwischen Personenfaktor und ersten Faktor
  - WW zwischen Personenfaktor und zweiten Faktor
  - WW zwischen Personenfaktor & WW aus den beiden Faktoren
  - Restliche unsystematische Einflüsse

# Zusammenfassung

- **Varianzanalyse mit Messwiederholung:** Varianzanalyse zu einem messwiederholten Versuchsdesign, bei dem die Messungen voneinander abhängig sind
- **Grundprinzip:** Zerlegung der Gesamtvarianz aller Messwerte in Personenvarianz, Effektvarianz und Residualvarianz (Fehlervarianz)
- **Inferenzstatistische Überprüfung** der Varianzverhältnisse mit dem kritischen und empirischen  $F$ -Wert
- **Voraussetzung von Varianzanalysen:** Intervallskalenniveau, Normalverteilung, Varianzhomogenität und Homogenität der Korrelationen zwischen den Stufen des messwiederholten Faktors
- **Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung** auf einem Faktor oder auf beiden Faktoren

$$F_A = \frac{\frac{QS_A}{df_A}}{\frac{QS_{AxVpn}}{df_{AxVpn}}}$$

# Prüfungsliteratur

- Rasch, B., Frieze, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2021). *Quantitative Methoden 2: Einführung in die Statistik für Psychologie, Sozial- & Erziehungswissenschaften* (5. Aufl.). Heidelberg: Springer.
  - Varianzanalyse mit Messwiederholung (S. 77–102)

# Weiterführende Literatur I

- Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Berlin: Springer.
  - Versuchspläne mit Messwiederholungen (S. 285–304)
- Eid, M., Gollwitzer, M., & Schmitt, M. (2017). *Statistik und Forschungsmethoden* (5. Aufl.). Weinheim: Beltz.
  - Einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung (S. 462–484)
- Leonhart, R. (2022). *Lehrbuch Statistik. Einstieg und Vertiefung* (5. Auflage). Bern: Huber.
  - Varianzanalyse mit Messwiederholungen (S. 485–535)

# Weiterführende Literatur II

- Sedlmeier, P., & Renkewitz, F. (2018). *Forschungsmethoden und Statistik: Ein Lehrbuch für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (3. Aufl.). München: Pearson.
  - Varianzanalyse mit abhängigen Stichproben (S. 485–500)
- Pituch, K. A., & Stevens, J. P. (2015). *Applied multivariate statistics for the social sciences* (6<sup>th</sup> ed.). Hove, East Sussex: Routledge.